

Sonja Eberling • Nevia Grbac • Ana Kirinčić

MOJA MATEMATIKA

8

udžbenik za učenike 8. razreda

prvo izdanje

Zagreb, 2021.



SADRŽAJ

1. POTENCIRANJE I KORJENOVANJE	7
KVADRIRANJE	8
POTENCIRANJE	14
KORJENOVANJE	22
2. SKUP REALNIH BROJEVA	43
SKUP REALNIH BROJEVA.....	44
KVADRATNA JEDNADŽBA OBLIKA $x^2 = k$	51
ALGEBARSKI IZRAZI.....	54
3. PITAGORIN POUČAK.....	70
PITAGORIN POUČAK	71
IZRAČUNAVANJE DULJINA STRANICA PRAVOKUTNOG TROKUTA.....	79
PRIMJENA PITAGORINA POUČKA NA PRAVOKUTNIK I KVADRAT.....	83
PRIMJENA PITAGORINA POUČKA NA JEDNAKOKRAČAN I JEDNAKOSTRANIČAN TROKUT	85
PRIMJENA PITAGORINA POUČKA NA ROMB	90
4. SUSTAVI DVIJU LINEARNIH JEDNADŽBI S DVJEMA NEPOZNANICAMA	102
SUSTAV DVIJU LINEARNIH JEDNADŽBI S DVJEMA NEPOZNANICAMA	103
METODA SUPSTITUCIJE	106
METODA SUPROTNIH KOEFICIJENATA	108
SVOĐENJE SUSTAVA NA STANDARDNI OBLIK	112
5. PRAVCI I KRUŽNICE U RAVNINI.....	122
PRAVAC U KOORDINATNOM SUSTAVU U RAVNINI	123
MEĐUSOBNI ODNOSI KRUŽNICA U RAVNINI.....	145
6. PROPORCIONALNOST U GEOMETRIJI.....	155
RAZMJER	156
TALESOV POUČAK.....	160
7. GEOMETRIJSKA TIJELA	174
ELEMENTI PROSTORA.....	175
GEOMETRIJSKA TIJELA.....	181
PRIZME	182
PIRAMIDE	197
VALJAK.....	208
STOŽAC	214
KUGLA	221
8. PRESLIKAVANJA RAVNINE.....	232
PRESLIKAVANJA RAVNINE.....	233
KOMPOZICIJA PRESLIKAVANJA RAVNINE	242



9. VJEROJATNOST	247
SLUČAJNI POKUS I SLUČAJNO DOGAĐAJ	248
VJEROJATNOST SLUČAJNOG DOGAĐAJA	250
10. MJERENJE	264
RAČUNANJE S NOVCEM	265
MJERENJE	281
RJEŠENJA.....	290

PREDGOVOR

Draga učenice, dragi učenice!

Pred tobom je dio nastavnih materijala za Matematiku 8. razreda. U potpunosti prate ishode učenja koji su navedeni u predmetnom kurikulumu Matematike.









Moja matematika 8 podijeljena je na teme. Svaka je tema razrađena kroz manje dijelove, postupno i s mnoštvom riješenih primjera. To će ti olakšati učenje i omogućiti samostalnost u procesu učenja.

Svaki dio, tako podijeljene teme, započinje motivacijskom pričom koja je istaknuta oznakom . Svi zaključci u udžbeniku istaknuti su oznakom . Sve definicije i poopćenja nalaze se u crvenim okvirima. Mali podsjetnici na važnije pojmove ili pravila, koji su prethodno obrađeni, nalaze se u zelenim okvirima. U udžbeniku postoje i dijelovi koji su istaknuti plavim okvirom. To su dodatni sadržaji koji nisu obavezni i namijenjeni su onima koji žele naučiti i nešto više.

U nastavnim materijalima nalaze se **4 vrste zadataka**:

- **Primjeri** – u potpunosti riješeni zadatci
- **Zadatci** – skupine zadataka koje prate gradivo
- **Zadatci za vježbu** – nalaze se na elektroničkoj platformi Mozabook
- **Provjeri svoje znanje** – nalaze se na elektroničkoj platformi Mozabook

Svi su zadatci grupirani prema razinama usvojenosti u 4 skupine koje su obilježene bojama:

	zadovoljavajuća razina	
	dobra razina	
	vrlo dobra razina	
	iznimna razina	

Za sve zadatke pripremljena su rješenja.

Uz svaku temu na elektroničkoj platformi Mozabook pripremljeno je mnoštvo interaktivnih zadataka rješavanjem kojih možeš uvježbati i provjeriti naučeno. U Mozabook-u su ti na raspolaganju detaljniji opisi i animacije uz koje ćeš lakše savladati i neke geometrijske sadržaje. Nadamo se da ćeš se sa zadovoljstvom koristiti ovim nastavnim materijalom koji će ti zasigurno omogućiti usvajanje matematičkih znanja, vještina i procesa na zanimljiv i kreativan način.

Autorice

POTENCIRANJE I KORJENOVANJE



NAUČIT ĆEŠ:

- ⇒ prepoznati i zapisati potenciju racionalne baze i nenegativnog cjelobrojnog eksponenta
- ⇒ računati s potencijama
- ⇒ opisati drugi korijen nenegativnog racionalnog broja
- ⇒ računati s korijenima

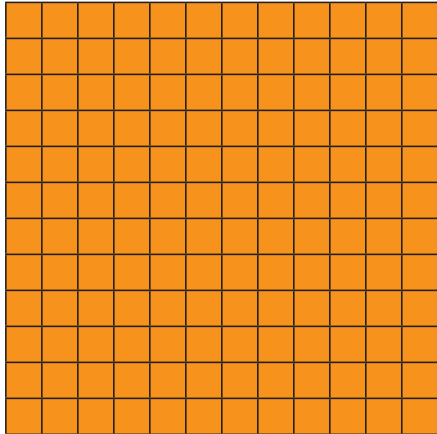
KVADRIRANJE

U petom smo razredu naučili da se umnožak dvaju jednakih brojeva može kraće zapisati kao kvadrat broja.

$$a \cdot a = a^2$$



Zadan je kvadrat kojemu je duljina stranice 12 cm. Odredimo mu površinu i izrazimo je u cm^2 , mm^2 i dm^2 .



$$P = 12 \cdot 12$$

$$P = 12^2$$

$$P = 144 \text{ cm}^2$$

$$12 \text{ cm} = (12 \cdot 10) \text{ mm} = 120 \text{ mm}$$

$$P = 120 \cdot 120$$

$$P = 120^2$$

$$P = 14400 \text{ mm}^2$$

$$12 \text{ cm} = (12 : 10) \text{ dm} = 1.2 \text{ dm}$$

$$P = 1.2 \cdot 1.2$$

$$P = 1.2^2$$

$$P = 1.44 \text{ dm}^2$$

a	a^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

PRIMJER 1

Izračunajmo.

$$(-6)^2 = -6 \cdot (-6) = 36$$

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

$$(-6)^2 = 6^2$$

$$(-1.7)^2 = -1.7 \cdot (-1.7) = 2.89$$

$$1.7^2 = 1.7 \cdot 1.7 = 2.89$$

$$(-1.7)^2 = 1.7^2$$

$$(-140)^2 = -140 \cdot (-140) = 19600$$

$$140^2 = 140 \cdot 140 = 19600$$

$$(-140)^2 = 140^2$$



Kvadrati suprotnih brojeva su jednaki.

$$(-a)^2 = a^2, a \in \mathbb{Q}$$

PRIMJER 2

Izračunajmo.

$$(-5)^2 = -5 \cdot (-5) = 25$$

$$-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$$

$$(-5)^2 \neq -5^2$$

PRIMJER 3

Izračunajmo.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$$

$$\frac{4^2}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7} = \frac{16}{7}$$

$$\frac{4}{7^2} = \frac{4}{7 \cdot 7} = \frac{4}{49}$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 \neq \frac{4^2}{7} \neq \frac{4}{7^2}$$

PRIMJER 4

Izračunajmo.

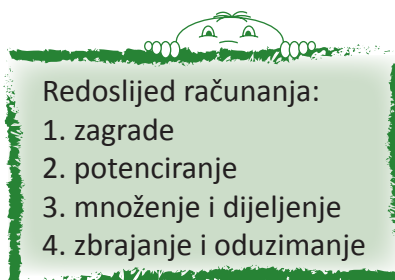
$$\text{a) } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{5^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{25} = \frac{25}{100} + \frac{16}{100} = \frac{41}{100}$$

$$\text{b) } -\frac{5}{3^2} + \frac{2^2}{9} - \frac{(-2)^2}{3^2} = -\frac{5}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2^2}{3} \cdot \frac{1}{-2^2} &= \\ &= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{-4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (-0.6)^2 + 0.7 : \left(-\frac{1}{4}\right) &= \\ &= 0.36 + 0.7 \cdot (-4) \\ &= 0.36 - 2.8 \\ &= -2.44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (2021 - 2020)^2 \cdot (2020 + 1) &= \\ &= 1^2 \cdot 2021 \\ &= 1 \cdot 2021 \\ &= 2021 \end{aligned}$$



UMNOŽAK KVADRATA I KVADRAT UMNOŠKA



Ante mora izračunati koliko je $0.125^2 \cdot 72^2$. Ne zna, napamet, koliko je 0.125^2 niti 72^2 . Nema kalkulator i nema puno vremena. Pomozimo mu.

Pomnožimo kvadrate brojeva.

$$4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144 = 12^2 = (4 \cdot 3)^2$$

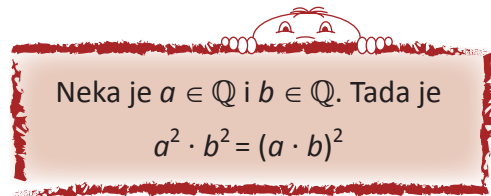
$$4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2$$

$$0.1^2 \cdot 30^2 = 0.01 \cdot 900 = 9 = 3^2 = (0.1 \cdot 30)^2$$

$$0.1^2 \cdot 30^2 = (0.1 \cdot 30)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2$$



Umnožak kvadrata jednak je kvadratu umnoška.

Riješimo Antin zadatak primjenom ove jednakosti.

$$0.125^2 \cdot 72^2 = (0.125 \cdot 72)^2 = \left(\frac{1}{8} \cdot 72\right)^2 = 9^2 = 81$$

PRIMJER 5

Zapišimo u obliku kvadrata umnoška pa izračunajmo.

a) $5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225$

b) $\left(-\frac{1}{20}\right)^2 \cdot 100^2 = \left(-\frac{1}{20} \cdot 100\right)^2 = (-5)^2 = 25$

c) $\left(2\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \left(3\frac{3}{5}\right)^2 = \left(2\frac{2}{9} \cdot 3\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{20}{9} \cdot \frac{18}{5}\right)^2 = 4^2 = 16$

d) $0.25^2 \cdot (-12)^2 = (-0.25 \cdot 12)^2 = (-3)^2 = 9$

To možemo učiniti i s više od dva faktora.

e) $8^2 \cdot 0.125^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(8 \cdot 0.125 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

f) $\left(-\frac{26}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{19}\right)^2 \cdot \left(\frac{-14}{13}\right)^2 \cdot 19^2 = \left(-\frac{26}{7} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{-14}{13} \cdot 19\right)^2 = 20^2 = 400$

PRIMJER 6

Zapišimo u obliku umnoška kvadrata pa izračunajmo.

$$a) (-7x)^2 = (-7 \cdot x)^2 = (-7)^2 \cdot x^2 = 49 \cdot x^2 = 49x^2$$

$$b) (0.4ab)^2 = (0.4 \cdot a \cdot b)^2 = 0.4^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = 0.16 \cdot a^2 \cdot b^2 = 0.16a^2b^2$$

$$c) \left(-\frac{3}{4}y\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot y^2 = \frac{9}{16}y^2$$

PRIMJER 7

Kvadrirajmo primjenjujući jednakost $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

$$24^2 = (12 \cdot 2)^2 = 12^2 \cdot 2^2 = 144 \cdot 4 = 576$$

$$33^2 = (11 \cdot 3)^2 = 11^2 \cdot 3^2 = 121 \cdot 9 = 1089$$

$$38^2 = (19 \cdot 2)^2 = 19^2 \cdot 2^2 = 361 \cdot 4 = 1444$$

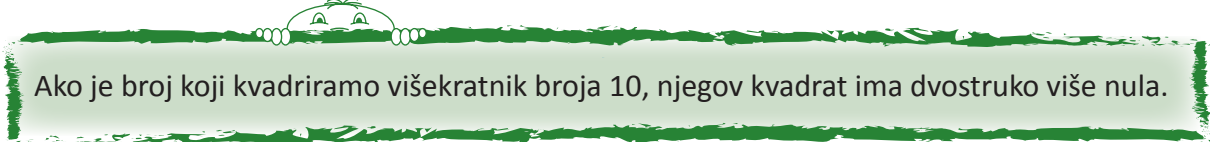
PRIMJER 8

Kvadrirajmo višekratnike broja 10 primjenjujući jednakost $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

$$120^2 = (12 \cdot 10)^2 = 12^2 \cdot 10^2 = 144 \cdot 100 = 14400$$

$$1900^2 = (19 \cdot 100)^2 = 19^2 \cdot 100^2 = 361 \cdot 10000 = 3610000$$

$$11000^2 = (11 \cdot 1000)^2 = 11^2 \cdot 1000^2 = 121 \cdot 1000000 = 121000000$$



Ako je broj koji kvadriramo višekratnik broja 10, njegov kvadrat ima dvostruko više nula.

KOLIČNIK KVADRATA I KVADRAT KOLIČNIKA



Jana mora izračunati koliko je $108^2 : 36^2$. Ne zna, napamet, koliko je 108^2 niti 36^2 . Nema kalkulator i nema puno vremena. Pomozimo joj.

Podijelimo kvadrate brojeva.

$$15^2 : 5^2 = 225 : 25 = 9 = 3^2 = (15 : 5)^2$$

$$15^2 : 5^2 = (15 : 5)^2$$

$$0.4^2 : 2^2 = 0.16 : 4 = 0.04 = 0.2^2 = (0.4 : 2)^2$$

$$0.4^2 : 2^2 = (0.4 : 2)^2$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} : \frac{1}{9} = \frac{1}{36} \cdot 9 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} : \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} : \frac{1}{3}\right)^2$$

Neka je $a \in \mathbb{Q}$ i $b \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$a^2 : b^2 = (a : b)^2$$



Količnik kvadrata jednak je kvadratu količnika.

Riješimo Janin zadatak primjenom ove jednakosti.

$$108^2 : 36^2 = (108 : 36)^2 = 3^2 = 9$$

PRIMJER 9

Zapišimo u obliku kvadrata količnika pa izračunajmo.

a) $45^2 : 15^2 = (45 : 15)^2 = 3^2 = 9$

b) $4.8^2 : 2.4^2 = (4.8 : 2.4)^2 = 2^2 = 4$

c) $28^2 : \left(\frac{-14}{3}\right)^2 = \left(28 : \frac{-14}{3}\right)^2 = \left(28 \cdot \frac{-3}{14}\right)^2 = (-6)^2 = 36$

d) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 : \left(\frac{-4}{35}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7} : \frac{-4}{35}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7} \cdot \frac{-35}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

e) $\frac{12^2}{21^2} = \left(\frac{12}{21}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$

f) $\frac{(6x)^2}{x^2} = \left(\frac{6x}{x}\right)^2 = 6^2 = 36$

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

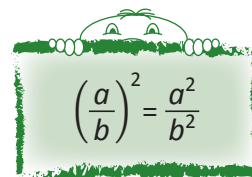
PRIMJER 10

Zapišimo u obliku količnika kvadrata pa izračunajmo.

$$\text{a) } \left(\frac{-5}{x}\right)^2 = \frac{(-5)^2}{x^2} = \frac{25}{x^2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{-0.7}{-b}\right)^2 = \left(\frac{0.7}{b}\right)^2 = \frac{0.7^2}{b^2} = \frac{0.49}{b^2}$$

$$\text{c) } \left(\frac{3y}{4a}\right)^2 = \frac{(3y)^2}{(4a)^2} = \frac{9y^2}{16a^2}$$



$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

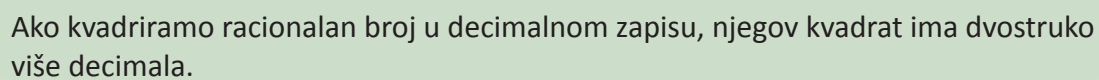
PRIMJER 11

Kvadrirajmo.

$$1.2^2 = \left(\frac{12}{10}\right)^2 = \frac{12^2}{10^2} = \frac{144}{100} = 1.44$$

$$0.18^2 = \left(\frac{18}{100}\right)^2 = \frac{18^2}{100^2} = \frac{324}{10000} = 0.0324$$

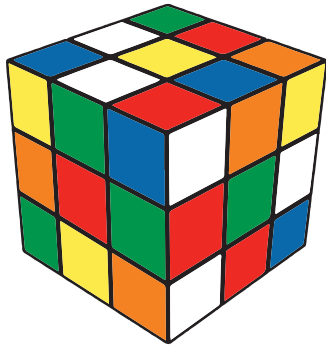
$$0.009^2 = \left(\frac{9}{1000}\right)^2 = \frac{9^2}{1000^2} = \frac{81}{1000000} = 0.000081$$



Ako kvadriramo racionalan broj u decimalnom zapisu, njegov kvadrat ima dvostruko više decimala.

POTENCIRANJE

?? Odredimo volumen Rubikove kocke.



Volumen kocke je veličina prostora koji ta kocka zauzima. Rubikova se kocka sastoji od $3 \cdot 3 \cdot 3$ jediničnih kocaka.

$$V = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$V = 3^3$$

$$V = 27$$

?? Fran je krenuo stavljati zrna riže na šahovsku ploču. Na prvo polje stavio je jedno zrno. Na svako sljedeće polje stavio je dva puta više zrna nego na prethodno. Koliko je zrna riže na osmom polju?

Na prvom je polju jedno zrno, na drugom dva zrna, na trećem četiri zrna, na četvrtom osam zrna, ...

Vrijedi:

1	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
	A	B	C	D	E	F	G	H

$$1 = 2^0$$

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

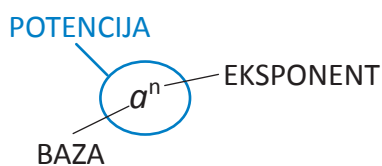
...

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

Na osmom je polju 128 zrna riže.

Neka je $a \in \mathbb{Q}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ jednakih faktora}} = a^n$$



a^n čitamo: a na entu

Neka je $a \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

Zapišimo u obliku potencije baze 2 koliko je zrna riže bilo na poljima u stupcu H šahovske ploče.

1								2^7
2								2^{15}
3								2^{23}
4								2^{31}
5								2^{39}
6								2^{47}
7								2^{55}
8								2^{63}
	A	B	C	D	E	F	G	H

Ako je a racionalan broj, tada je a^n racionalan broj za koji vrijedi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}}$$

$$a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$$

PRIMJER 12

Naznačene umnoške zapišimo u obliku potencije.

a) $9 \cdot 9 = 9^2$

b) $-6 \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^5$

c) $0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.7^6$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^3$

e) $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$

f) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) = (-b)^3$

g) $3b \cdot 3b = (3b)^2$

h) $(a+5) \cdot (a+5) \cdot (a+5) = (a+5)^3$

PRIMJER 13

Zapišimo potencije u obliku naznačenog umnoška.

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) $(-0.5)^6 = (-0.5) \cdot (-0.5) \cdot (-0.5) \cdot (-0.5) \cdot (-0.5) \cdot (-0.5)$

c) $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\right)$

d) $(-y)^7 = (-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y)$

e) $\left(\frac{a}{3}\right)^4 = \left(\frac{a}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3}\right)$

f) $(x-y)^2 = (x-y) \cdot (x-y)$



Promotrimo sljedeći niz potencija.

$$(-1)^1 = -1$$


$$(-1)^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$(-1)^3 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$(-1)^4 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$(-1)^5 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$(-1)^6 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$$



Dobro je znati!

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$		
$2^6 = 64$		
$2^7 = 128$		
$2^8 = 256$		
$2^9 = 512$		
$2^{10} = 1024$		

PRIMJER 14

Izračunajmo.

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$$



Potencija negativne baze i parnog eksponenta je pozitivna.

PRIMJER 15

Izračunajmo.

$$(-8)^1 = -8$$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$$



Potencija negativne baze i neparnog eksponenta je negativna.

PRIMJER 16

Izračunajmo.

a) $25 - 2^3 = 25 - 8 = 17$


b) $3 + (-2)^4 = 3 + 16 = 19$

c) $-2 + \frac{1}{3} \cdot 6^2 - (-2)^3 : 4 =$
 $= -2 + \frac{1}{3} \cdot 36 - (-8) : 4 =$
 $= -2 + 12 + 2 = 12$

d) $(7 - 4)^3 \cdot 2 - 2 =$
 $= 3^3 \cdot 2 - 2 =$
 $= 27 \cdot 2 - 2 =$
 $= 54 - 2 =$
 $= 52$

e) $(5 - 7)^2 : 4 - 4 =$
 $= (-2)^2 : 4 - 4 =$
 $= 4 : 4 - 4 =$
 $= 1 - 4 =$
 $= -3$

f) $(3 - 2 \cdot 3)^3 =$
 $= (3 - 6)^3 =$
 $= (-3)^3 =$
 $= -27$



Redoslijed računanja:

1. zagrade
2. potenciranje
3. množenje i dijeljenje
4. zbrajanje i oduzimanje

MNOŽENJE I DIJELJENJE POTENCIJA JEDNAKIH BAZA



Pomnožimo, a zatim zapišimo faktore i umnožak u obliku potencije.

$$32 \cdot 8 = 256$$

$$2^5 \cdot 2^3 = 2^8$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{243}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$



Umnožak potencija jednakih baza možemo dobiti tako da bazu prepisemo, a eksponente zbrojimo.

Neka je $a \in \mathbb{Q}$ i $m, n \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

PRIMJER 17

Pomnožimo potencije.

$$\text{a) } 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$$

$$\text{b) } (-5)^5 \cdot (-5)^3 = (-5)^{5+3} = (-5)^8$$

$$\text{c) } 4.1^3 \cdot 4.1^2 = 4.1^{3+2} = 4.1^5$$

$$\text{d) } \left(-\frac{4}{3}\right)^9 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^9 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^1 = \left(-\frac{4}{3}\right)^{9+1} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{10}$$

PRIMJER 18

Pomnožimo potencije.

$$\text{a) } 3 \cdot 5^2 \cdot 8 \cdot 5^6 = (3 \cdot 8) \cdot (5^2 \cdot 5^6) = 24 \cdot 5^8$$

$$\text{b) } -\frac{3}{7} \cdot 4^2 \cdot \frac{7}{5} \cdot 4^5 = \left(-\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5}\right) \cdot (4^2 \cdot 4^5) = -\frac{3}{5} \cdot 4^7$$

$$\text{c) } -0.25 \cdot 8^5 \cdot (-32) \cdot 8^2 = (-0.25 \cdot (-32)) \cdot (8^5 \cdot 8^2) = 8 \cdot 8^7 = 8^1 \cdot 8^7 = 8^8$$

PRIMJER 19

Zapišimo u obliku potencije.

$$\text{a) } 5^{12} \cdot 5^x = 5^{12+x}$$

$$\text{b) } 7^y \cdot 7 = 7^y \cdot 7^1 = 7^{y+1}$$

$$\text{c) } 10^{x+5} \cdot 10^{2x+1} = 10^{(x+5)+(2x+1)} = 10^{x+5+2x+1} = 10^{3x+6}$$

$$\text{d) } 3^{5x} \cdot 9 = 3^{5x} \cdot 3^2 = 3^{5x+2}$$

$$\text{e) } 8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{3+x}$$



Podijelimo, a zatim zapišimo djeljenik, djelitelj i količnik u obliku potencije.

$$256 : 8 = 32$$

$$2^8 : 2^3 = 2^5$$

$$\frac{1}{27} : \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \cdot 9 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$



Količnik potencija jednakih baza možemo dobiti tako da bazu prepíšemo, a eksponente oduzmemo.

Neka je $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ i $m, n \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

PRIMJER 20

Podijelimo potencije.

a) $6^{12} : 6^2 = 6^{12-2} = 6^{10}$

b) $(-15)^8 : (-15)^5 = (-15)^{8-5} = (-15)^3$

c) $1.3^5 : 1.3^4 = 1.3^{5-4} = 1.3^1 = 1.3$

d) $\left(\frac{7}{10}\right)^7 : \left(\frac{7}{10}\right) = \left(\frac{7}{10}\right)^7 : \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \left(\frac{7}{10}\right)^{7-1} = \left(\frac{7}{10}\right)^6 = 0.7^6$

e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 : \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{4-4} = \left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

f) $\frac{10^7}{10^5} = 10^{7-5} = 10^2$

g) $\frac{(-2)^{11}}{-2} = \frac{(-2)^{11}}{(-2)^1} = (-2)^{11-1} = (-2)^{10}$

$$\frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}$$

PRIMJER 21

Izračunajmo.

a) $(-12 \cdot 3^{16}) : (6 \cdot 3^4) = \frac{-12 \cdot 3^{16}}{6 \cdot 3^4} = -2 \cdot 3^{16-4} = -2 \cdot 3^{12}$

b) $(-0.9 \cdot 7^8) : (0.3 \cdot 7^2) = \frac{-0.9 \cdot 7^8}{0.3 \cdot 7^2} = -3 \cdot 7^{8-2} = -3 \cdot 7^6$

c) $(1.6 \cdot 3^5) : (-2 \cdot 3^2) = \frac{1.6 \cdot 3^5}{-2 \cdot 3^2} = -0.8 \cdot 3^{5-2} = -0.8 \cdot 3^3$

d) $-7a^5 : 21a^3 = -\frac{7 \cdot a^5}{21 \cdot a^3} = -\frac{1}{3} \cdot a^{5-3} = -\frac{1}{3}a^2$

PRIMJER 22

Podijelimo pa zapišimo u obliku potencije.

$$a) (36 \cdot 3^{14}) : (4 \cdot 3^9) = \frac{36 \cdot 3^{14}}{4 \cdot 3^9} = 9 \cdot 3^{14-9} = 3^2 \cdot 3^5 = 3^7$$

$$b) -(52 \cdot 2^{10}) : (13 \cdot 2^5) = -\frac{52 \cdot 2^{10}}{13 \cdot 2^5} = -4 \cdot 2^{10-5} = -4 \cdot 2^5 = -2^2 \cdot 2^5 = -2^7$$

$$c) (8 \cdot 5^8) : (200 \cdot 5^3) = \frac{8 \cdot 5^8}{200 \cdot 5^3} = \frac{5^8}{25 \cdot 5^3} = \frac{5^8}{5^2 \cdot 5^3} = \frac{5^8}{5^{2+3}} = \frac{5^8}{5^5} = 5^{8-5} = 5^3$$

PRIMJER 23

Zapišimo u obliku potencije.

$$a) 6^7 : 6^x = 6^{7-x}$$

$$b) 10^a : 10^4 = 10^{a-4}$$

$$c) 3^{3x+4} : 3^{x+3} = 3^{(3x+4)-(x+3)} = 3^{3x+4-x-3} = 3^{2x+1}$$

$$d) 5^b : 25 = 5^b : 5^2 = 5^{b-2}$$

$$e) 32 : 2^x = 2^5 : 5^x = 5^{5-x}$$



Naučili smo da se prilikom zapisivanja jako velikih i jako malih brojeva često upotrebljava zapis u kojem se pojavljuje potencija s bazom 10 i cjelobrojnim eksponentom.

$$7450000000 = 7.45 \cdot 10^9$$

$$-31490000 = -3.149 \cdot 10^7$$

$$0.00000000842 = 8.42 \cdot 10^{-9}$$

$$-0.0000000005 = -5 \cdot 10^{-10}$$

Podsjetimo se!

Znanstveni zapis broja je zapis u obliku umnoška

$$k \cdot 10^n$$

gdje je $1 \leq |k| < 10$ i $n \in \mathbb{Z}$.

PRIMJER 24

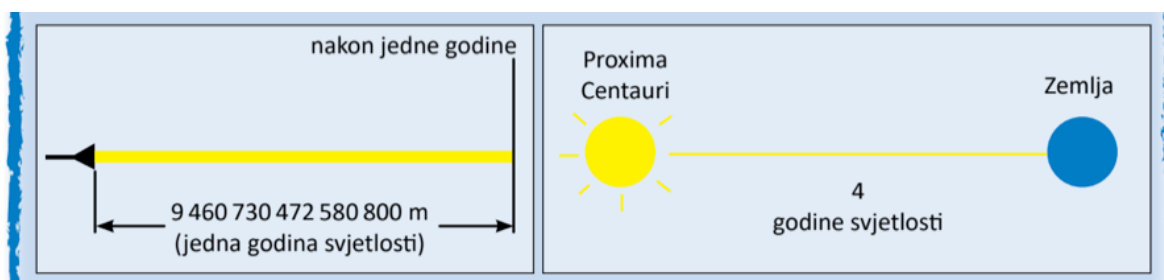
Svjetlosna godina je jedinica za mjerenje duljine koja se upotrebljava u astronomiji i odgovara udaljenosti od 9460730472580800 m. Udaljenost Zemlje od zvijezde najbliže Suncu, Proxime Centauri, je oko 4 svjetlosne godine. Izrazimo tu udaljenost u metrima, znanstvenim zapisom.

Izrazimo jednu godinu svjetlosti znanstvenim zapisom i zaokružimo koeficijent potencije na jednu decimalu.

$$9460730472580800 \text{ m} = 9.4607304725808 \cdot 10^{15} \text{ m} \approx 9.5 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Udaljenost zvijezde Proxime Centauri od Zemlje je, približno,

$$4 \cdot 9.5 \cdot 10^{15} \text{ m} = 38 \cdot 10^{15} \text{ m} = 3.8 \cdot 10 \cdot 10^{15} \text{ m} = 3.8 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$



PRIMJER 25

Masa molekule vodika je 0.000 000 000 000 000 000 000 003 34 g. Molekula vodika sastoji se od dva atoma vodika. Kolika je masa atoma vodika?

$$m_{H_2} = 0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 003\ 34\ g = 3.34 \cdot 10^{-24}\ g$$

$$m_H = \frac{3.34 \cdot 10^{-24}}{2}\ g$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-24}\ g$$



Masa atoma vodika je $1.67 \cdot 10^{-24}\ g$.

POTENCIRANJE POTENCIJE



Naučili smo da je potencija kraći zapis umnoška jednakih faktora. Promotrimo sada potenciju čija je baza također potencija.

$$(2^5)^3 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5$$

Naučili smo i množiti potencije jednakih baza.

$$2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5+5} = 2^{15}$$

Uoči!

$$(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3}$$



Potenciju možemo potencirati tako da bazu prepíšemo, a eksponente pomnožimo.

Neka je $a \in \mathbb{Q}$ i $m, n \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

PRIMJER 26

Potencirajmo potenciju.

a) $(7^3)^8 = 7^3 \cdot 8 = 7^{24}$

b) $(10^6)^2 = 10^{6 \cdot 2} = 10^{12}$

c) $(3^x)^5 = 3^{x \cdot 5} = 3^{5x}$

d) $(x^2)^7 = x^{2 \cdot 7} = x^{14}$

e) $(a^4)^b = a^{4 \cdot b} = a^{4b}$

PRIMJER 27

Zapišimo u obliku potencije s bazom 2.

$$a) 4^7 = (2^2)^7 = 2^{2 \cdot 7} = 2^{14}$$

$$b) 8^2 \cdot 16^3 = (2^3)^2 \cdot (2^4)^3 = 2^{3 \cdot 2} \cdot 2^{4 \cdot 3} = 2^6 \cdot 2^{12} = 2^{18}$$

$$c) 32^3 : 64^2 = (2^5)^3 : (2^6)^2 = 2^{5 \cdot 3} : 2^{6 \cdot 2} = 2^{15} : 2^{12} = 2^3$$

PRIMJER 28

Zapišimo u obliku potencije.

$$a) (7^x)^2 = 7^{x \cdot 2} = 7^{2x}$$

$$b) (3^a)^{4b} = 3^{a \cdot 4b} = 3^{4ab}$$

$$c) 36^y = (6^2)^y = 6^{2 \cdot y} = 6^{2y}$$

$$d) 16 \cdot 8^x = 2^4 \cdot (2^3)^x = 2^4 \cdot 2^{3 \cdot x} = 2^{4+3x}$$

$$e) 25^x : 5 = (5^2)^x : 5^1 = 5^{2 \cdot x} : 5^1 = 5^{2x-1}$$

ZBRAJANJE POTENCIJA

U sedmom smo razredu naučili zbrajati potencije baze 10. Naučeno ćemo primijeniti i na zbrajanje potencija čija je baza bilo koji racionalan broj.

Podsjetimo se da oduzeti znači dodati suprotan broj pa ćemo govoriti ne samo o zbrajanju, nego i o oduzimanju potencija.



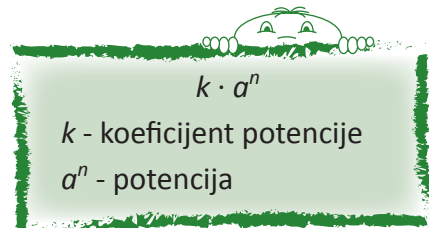
Izračunajmo.

$$8 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^4 - 2 \cdot 5^4 = 9 \cdot 5^4$$

$$6 \cdot 2^5 - 4 \cdot 3^7 + 3 \cdot 2^5 - 6 \cdot 3^7 = 9 \cdot 2^5 - 10 \cdot 3^7$$

$$2y^5 + 5y^5 - y^5 = 2y^5 + 5y^5 - 1y^5 = 6y^5$$

$$4x^6 + 5x^3 - 6x^3 - 3x^6 = 1x^6 - 1x^3 = x^6 - x^3$$



Zbrajati možemo samo jednake potencije tj. potencije koje imaju jednake baze i jednake eksponente. Zbrajamo ih tako da im zbrojimo koeficijente, a potenciju prepíšemo.

PRIMJER 29

Zbrojimo pa zapišimo zbroj u obliku potencije.

$$a) -7 \cdot 2^7 + 15 \cdot 2^7 = 8 \cdot 2^7 = 2^3 \cdot 2^7 = 2^{10}$$

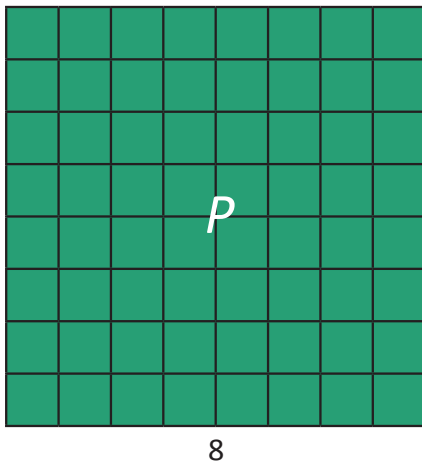
$$b) 3 \cdot (-1.5)^3 - 4.5 \cdot (-1.5)^3 = -1.5 \cdot (-1.5)^3 = (-1.5)^1 \cdot (-1.5)^3 = (-1.5)^4$$

$$c) \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 - \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^7$$

KORJENOVANJE

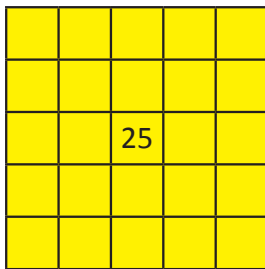


Želimo li odrediti površinu kvadrata kojem je duljina stranice 8, računamo



$$P = 8^2 = 64$$

Želimo li odrediti duljinu stranice kvadrata kojem je površina 25, trebamo odrediti pozitivan broj čiji je kvadrat 25.



$$5^2 = 25$$

$$5 = \sqrt{25}$$

Duljina stranice kvadrata kojem je površina 25 je 5.



Korjenovanje je određivanje nenegativnog broja kojem je poznat kvadrat.

$$\sqrt{16} = 4 \text{ jer je } 4^2 = 16$$

$$\sqrt{81} = 9 \text{ jer je } 9^2 = 81$$

$$\sqrt{100} = 10 \text{ jer je } 10^2 = 100$$

drugi korijen
ili kvadratni korijen
ili korijen

$$\sqrt{a}$$

potkorijenska
veličina ili
radikand