Nakladnički niz

ŠILOBOD

Anđelko Marić

PUT DO MATEMATIČKOG OLIMPA - 5

dodatna nastava i matematička natjecanja

Zbrika riješenih zadataka
za peti razred osnovne škole

Prvo izdanje
Zagreb 2007.

Za izdavača
Đurđica Salamon, dipl. ing.

Autor
Anđelko Marić, prof.

Recezenti
Nives Jozić, prof.
Ana Župić, prof.

Lektorica
Milica Dalbello, prof.
mr. sc. Milica Žužić

Grafička urednica
Eleni Šakan

CIP dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 645621

ISBN 978-953-7087-55-5

Nakladnik
Alka script d.o.o.
Zagreb, Nehajska 42
tel. 01 30 135 30
fax. 01 36 643 14
e-mail: alka.script@zg.t-com.hr
www.alkascript.hr

Tisak
Gradska tiskara Osijek

SADRŽAJ

1. Brojevi

1.1.

Ako nijedan od dvaju prirodnih brojeva nije djeljiv s 2, tada je zbroj tih brojeva djeljiv s 2. Provjeri to na nekoliko primjera. Objasni općenito.

1.2.

Ako nijedan od dvaju prirodnih brojeva nije djeljiv s 2, tada je razlika tih brojeva djeljiva s 2. Provjeri to na nekoliko primjera. Objasni općenito.

1.3.

Provjeri na nekoliko primjera tvrdnju: zbroj i razlika dvaju prirodnih brojeva iste su parnosti. Dokaži to općenito, tako da načiniš tablicu sa svim mogućim slučajevima.

1.4.

Provjeri na nekoliko primjera da vrijedi tvrdnja: ako bilo kojem parnom prirodnom broju pribrojimo polovicu toga broja, dobit ćemo broj koji je djeljiv s 3.

1.5.

Provjeri na nekoliko primjera da vrijedi tvrdnja: ako bilo kojem prirodnom broju koji je djeljiv s 4 pribrojimo četvrtinu toga broja, dobit ćemo broj koji je djeljiv s 5.

1.6.

Provjeri na nekoliko primjera da vrijedi: zbroj pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je s 5.

1.7.

Provjeri na nekoliko primjera da vrijedi: zbroj devet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je s 9.

1.8.

Provjeri na nekoliko primjera sljedeću tvrdnju: umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 6.

RJEŠENJA

1.1.

Nijedan od brojeva 17 i 125 nije djeljiv s 2.

Zbroj je tih brojeva $17 + 125 = 142 = 71 \cdot 2$. Vidimo da je taj zbroj djeljiv s 2. Isto vrijedi za brojeve 14 561 i 27 347 i njihov zbroj $14\,561 + 27\,347 = 41\,908$.

Objašnjenje: Broj koji nije djeljiv s 2 jest neparan. Zbroj dvaju neparnih prirodnih brojeva paran je broj. Svaki parni prirodni broj djeljiv je s 2.

1.2.

Nijedan od brojeva 6159 i 3281 nije djeljiv s 2.

Njihova je razlika $6159 - 3281 = 2878 = 1439 \cdot 2$ i očito je djeljiva s 2. Isto vrijedi i za brojeve 38 657 i 29 445 te za njihovu razliku $38\,657 - 29\,445 = 9212 = 4606 \cdot 2$.

Objašnjenje: Broj koji nije djeljiv s 2 jest neparan. Razlika dvaju neparnih brojeva paran je broj. Svaki parni broj djeljiv je s 2.

1.3.

Za dva prirodna broja kažemo da su iste parnosti, ako su oba parna ili ako su oba neparna. Ako je jedan od njih paran, a drugi neparan, kažemo da su različite parnosti.

Promatrajmo zbroj i razliku nekih nasumice uzetih prirodnih brojeva.

$113 + 27 = 140$, $113 - 27 = 86$. Zbroj i razlika parni su.

$174 + 25 = 199$, $174 - 25 = 149$. Zbroj i razlika neparni su.

$573 + 126 = 699$, $573 - 126 = 447$. Zbroj i razlika neparni su.

$1348 + 726 = 2074$, $1348 - 726 = 622$. Zbroj i razlika parni su.

Vidimo da su u prethodnim primjerima zbroj i razlika iste parnosti.

Promatrajmo bilo koja dva prirodna broja a i b, njihov zbroj $a + b$ i razliku $a - b$, pri čemu je $a > b$. Označimo s P paran broj, a s N neparan. To sve možemo staviti u tablicu u kojoj su svi mogući slučajevi.

a	b	$a+b$	$a-b$
P	P	P	P
P	N	N	N
N	P	N	N
N	N	P	P

Vidimo da su u svim mogućim slučajevima brojevi $a+b$ i $a-b$ iste parnosti.

1.4.

Za primjere parnih brojeva uzmimo brojeve: 44, 378 i 15 628. Polovice tih brojeva jesu: 22, 189 i 7814. Vrijedi: $44+22=66$, $378+189=567$, $15\,628+7814=23\,442$.

Pomoću pravila o djeljivosti brojem 3 provjerimo jesu li brojevi 66, 567 i 23 442 djeljivi s 3.

Napomena: Ova je tvrdnja samo drukčije iskazana tvrdnja: ako nekom prirodnom broju pribrojimo dvostruki taj broj, dobit ćemo trostruki taj broj, to jest broj djeljiv s 3. Naime, polovica parnog broja prirodni je broj, a svaki je broj dvostruko veći od svoje polovice.

1.5.

Brojevi: 148, 3012, 26 348 i 130 284 djeljivi su s 4. Četvrtine tih brojeva jesu redom: 37, 753, 6587 i 32 571.

Vrijedi: $148+37=185$, $3012+753=3765$, $26\,348+6587=32\,935$, $130\,284+32\,571=162\,855$.

Svaki od brojeva 185, 3765, 32 935 i 162 855 djeljiv je s 5.

1.6.

$17+18+19+20+21=95$, $123+124+125+126+127=625$,

$3471+3472+3473+3474+3475=17\,365$,

$12\,338+12\,339+12\,340+12\,341+12\,342=61\,700$.

Lako se uvjerimo da je svaki od zbrojeva 95, 625, 17 365 i 61 700 djeljiv s 5 (pravilo o djeljivosti s 5). Opći dokaz ove tvrdnje naučit ćete tijekom daljnjeg školovanja.

1.7.

$24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 = 252$

$378 + 379 + 380 + 381 + 382 + 383 + 384 + 385 + 386 = 3438$

$2736 + 2737 + 2738 + 2739 + 2740 + 2741 + 2742 + 2743 + 2744 = 24\,660$

Pomoću pravila o djeljivosti brojem 9, lako se uvjerimo da je svaki od ovih zbrojeva djeljiv s 9.

Napomena: Iz dvaju prethodnih zadataka ne smijemo zaključiti da je zbroj bilo kojih n uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s n. To vrijedi samo ako je n neparan broj.

Tako je, na primjer, zbroj sedam uzastopnih brojeva:

$125 + 126 + 127 + 128 + 129 + 130 + 131 = 896 = 128 \cdot 7$ očito djeljiv sa 7. Međutim zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva: $781 + 782 + 783 + 784 = 3130$ nije djeljiv s 4. Sve se ovo može dokazati općenito.

1.8.

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 = 10 \cdot 6$, $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 = 84 \cdot 6$, $136 \cdot 137 \cdot 138 = 2\,571\,216 = 428\,536 \cdot 6$.

Vidimo da je svaki od umnožaka djeljiv sa 6. To smo mogli utvrditi i bez računanja tih umnožaka.

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = (3 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5) = 6 \cdot (2 \cdot 5) = 6 \cdot 10$

$7 \cdot 8 \cdot 9 = 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 4 \cdot 3) = 6 \cdot 84$

$136 \cdot 137 \cdot 138 = 2 \cdot 68 \cdot 137 \cdot 3 \cdot 46 = (2 \cdot 3) \cdot (68 \cdot 137 \cdot 46) = 6 \cdot 428\,536$

Napišimo nekoliko početnih prirodnih brojeva:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, <u>10, 11, 12</u>, 13, 14, ...

Promatrajmo bilo koja tri uzastopna prirodna broja. Ovdje su to brojevi 10, 11 i 12.

Ne postoje dva uzastopna neparna broja, što znači da je od dvaju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek jedan paran. To jest, od triju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek je barem jedan paran, odnosno djeljiv s 2. Ne postoje tri uzastopna prirodna broja od kojih nijedan nije djeljiv s 3. Zato je od triju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek jedan djeljiv s 3. Zaključujemo da je umnožak triju uzastopnih brojeva djeljiv s 2 i s 3. Broj koji je djeljiv s 2 i s 3, djeljiv je i sa 6.